#2025-2026, #Analyse i

Rappel : " Proche de "

$L \in \mathbb{R}$: $\boxed{Q}\,(\varepsilon/\delta) \dots \ | \ - L| \le (\varepsilon/\delta)$

$+\infty$: $\boxed{Q}\,(N/M/C) \dots \ \ \ge (N/M/C)$

$-\infty$: $\boxed{Q}\,(N/M/C) \dots \ \ \le -(N/M/C)$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell$: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \ge N$, $|x_n - \ell| \le \varepsilon$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$: $\forall M > 0$, $\exists \delta > 0$ tq $\forall x$ avec $0 < |x - x_0| < \delta$, $f(x) \ge M$

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \ell$: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \ge N$, $|x_n - \ell| \le \varepsilon$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$: $\forall M > 0$, $\exists \delta > 0$ tq $\forall x$ avec $0 < |x - x_0| < \delta$, $f(x) \ge M$

$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$: $\forall C > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \ge N$, $x_n \le -C$

Proposition 4.24 (changement de variables)

Soient $x_0, \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$, $D, E \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0, $g : E \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de ℓ_1 tq

(i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell_1$

(ii) $\lim\limits_{x\to \ell_1} g(x) = \ell_2$

(iii) $\exists \delta > 0$ tq $\forall x \in \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\, \setminus \{x_0\}$, $f(x) \neq \ell_1$

On a alors

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \ell_2$$

<u>Exemple 4.25</u> : (i) Calculons $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$

On utilise $1-\cos(x) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x \cdot x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}$$

$$\frac{x}{2} = y$$

Si $g(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, $f(x) = \frac{x}{2}$, on a $\overbrace{\lim_{x \to 0} f(x) = 0, \ \forall x \neq 0, \ f(x) \neq 0}^{(i) \ \& \ (iii)}$

$$\lim_{x \to 0} g(x) = 1 \qquad x_0 = 0, \ \ell_1 = 0, \ \ell_2 = 1$$

Donc, par la proposition,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}}_{1} \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}}_{1} = \frac{1}{2}$$

(ii) Pourquoi hypothèse (iii) est nécessaire.

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad g(x) = \begin{cases} 14 & \text{si } x \neq 0 \\ 58 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On a $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0} g(x) = 14$

Néanmoins, $\lim_{x\to 0} g(f(x)) = \lim_{x\to 0} g(0) = \lim_{x\to 0} 58 = 58$

§4.3 Limites latérales et à l'infini

$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

$x < x_0$ $\qquad\qquad$ $x > x_0$

Définition 4.26 (limites latérales et à l'infini)

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$

(i) - (iv) à lire poly page 83.

$\lim\limits_{x \to -1^+} \log(x)$ n'a pas de sens

$\lim\limits_{x \to 0^+} \log(x)$ a un sens

(v) - (viii)

$\lim\limits_{\boxed{}} f(x) = \ell$: $\forall \varepsilon > 0$ $\boxed{\quad ? \quad}$ $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$

$0 < |x - x_0| < \delta$

$\Big($ $x \to x_0$ $\qquad \exists \delta > 0$ tq $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$ $\Big)$

$x \to x_0^+$ $\qquad \exists \delta > 0$ tq $\forall x \in]x_0, x_0 + \delta[$

$x \to x_0^-$ $\qquad \exists \delta > 0$ tq $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0[$

$x \to +\infty$ $\qquad \exists M \geq 0$ tq $\forall x \geq M$

$x \to -\infty$ $\qquad \exists M \geq 0$ tq $\forall x \leq -M$

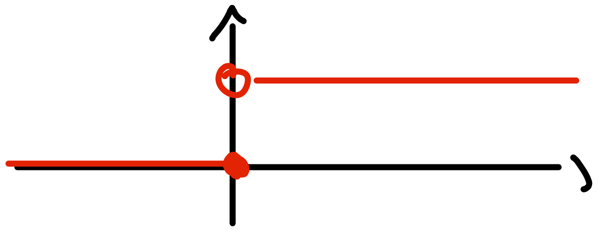
(ix) - (xii) admettre une limite $\exists \ell \in \mathbb{R}$ tq ...

Remarque 4.27

Une fonction est définie au voisinage de x_0 si et elle est définie à droite et à gauche de x_0, et $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe si et seulement si $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ et $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ existent et sont égales

<u>Exemples 4.28</u>

(i) Soit la fonction de Heaviside $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$



Montrons que $\lim_{x \to 0^-} H(x) = 0$ et $\lim_{x \to 0^+} H(x) = 1$

$$\lim_{x \to 0^-} H(x) \underset{x<0}{=} \lim_{x \to 0^-} 0 = 0 \quad , \quad \lim_{x \to 0^+} H(x) \underset{x>0}{=} \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

En particulier vu que $\lim_{x \to 0^-} H(x) \neq \lim_{x \to 0^+} H(x)$, $\lim_{x \to 0} H(x)$ n'existe pas.

(ii) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ des paramètres, et $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x < 0 \\ b \sin(x) + a \cdot \cos(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Pour quels paramètres $a, b \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to 0} f(x)$ existe ?

On a $\lim_{x \to 0^-} f(x) \underset{x<0}{=} \lim_{x \to 0^-} ax + b = a \cdot 0 + b = \underline{b}$

et $\lim_{x \to 0^+} f(x) \underset{x>0}{=} \lim_{x \to 0^+} b \cdot \sin(x) + a \cdot \cos(x) = b \cdot 0 + a \cdot 1$

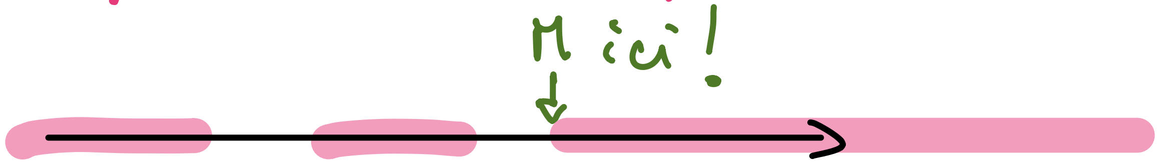
$= a.$

Ainsi, $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe si et seulement si

$$b = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = a \quad , \text{i.e.} \quad a=b$$

(iii) Soit $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ défini par $f(x) = \frac{1}{x^2}$

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$ RdP : résoudre $|f(x)-\ell| \leq \varepsilon$ pour x



$$|f(x)-\ell| \leq \varepsilon \iff \left|\frac{1}{x^2} - 0\right| \leq \varepsilon$$

$$\frac{1}{x^2} \leq \varepsilon \qquad x^2 \geq \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow x \geq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}_{M} \text{ ou } x \leq -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

Définition 4.29

$$\lim_{\boxed{}} f(x) = \boxed{} : \boxed{}\ \boxed{\phantom{\exists\delta>0 \text{ tq } \forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\setminus\{x_0\}}}\ \boxed{}$$

$x \to x_0$	$\exists \delta > 0$ tq $\forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\setminus \{x_0\}$
$x \to x_0^+$	$\exists \delta > 0$ tq $\forall x \in]x_0, x_0+\delta[$,
$x \to x_0^-$	$\exists \delta > 0$ tq $\forall x \in]x_0-\delta, x_0[$
$x \to +\infty$	$\exists M \geq 0$ tq $\forall x \geq M$
$x \to -\infty$	$\exists M \geq 0$ tq $\forall x \leq -M$

ℓ	: $\forall \varepsilon > 0$	$|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$
$+\infty$	: $\forall M > 0$	$f(x) \geq M$
$-\infty$	: $\forall M > 0$	$f(x) \leq -M$

Chapitre 5 Fonctions continues

§ 5.1 : Définition & propriétés élémentaires

Définition 5.1 (Ensemble ouvert, fermé)

Soit $E \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble. On dit que

(i) E est *ouvert* si $\forall x_0 \in E$, $\exists \delta > 0$ tq $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subseteq E$

(ii) E est *fermé* si $\mathbb{R} \setminus E$ est ouvert.

Remarque 5.2 : (i) Les seuls ensembles qui sont à la fois ouverts et fermés sont $\mathbb{R}$ et $\emptyset$

(ii) il existe des ensembles ni ouverts ni fermés

par exemple $[0, 1[$, $]0, 1[\cup \{2\}$, $]0, 1[\cup [3, 4]$

(iii) Les intervalles ouverts sont ouverts, et les intervalles fermés sont fermés.

(iv) Si D est ouvert, et $f : D \to \mathbb{R}$ alors $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, f est définie au voisinage de x_0

(v) On peut montrer qu'une union d'ensembles ouverts est ouverte

__Définition 5.3__ (Fonction continue)

Soit $D \subset \mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$.

(i) Soit $x_0 \in D$. Supposons que f est définie au voisinage de x_0. On dit que f est __continue en x_0__ si

$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, i.e.

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$

(ii) Supposons que D est ouvert. On dit que f est <u>continue</u> si $\forall x_0 \in D$, f est continue en x_0, i.e.

$\forall x_0 \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$

<u>Remarque 5.4</u>

Si f n'est pas continue en un point $x_0 \in D$, 2 possibilités

(i) $\lim_{x \to x_0} f(x)$ n'existe pas

(ii) $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe mais ne vaut pas $f(x_0)$

Dans les deux cas, on a

$\exists \varepsilon > 0$ tq $\forall \delta > 0$, $\exists x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ tq $|f(x) - f(x_0)| > \varepsilon$

Proposition 5.5 Propriétés algébrique

Soient $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues en x_0 et $h : f(D) \to \mathbb{R}$ continue en $f(x_0)$.

Alors,

(i) $f + g$ est continue en x_0

(ii) $f \cdot g$ est continue en x_0

(iii) si $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est continue en x_0

(iv) $h \circ f$ est continue en x_0

(v) Si $\varphi : D \to \mathbb{R}$ est tq $\exists \delta > 0$ tq $\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, $f(x) = \varphi(x)$, alors, φ est continue en x_0.

Proposition 5-6

Les fonctions usuelles : Les polynômes, les racines $n^{\text{ièmes}}$, la valeur absolue, sin, arcsin, cos, arccos, tan, arctan, e^x, log, cosh, sinh sont continues là où elles sont définies.

Exemples 5-7

(i) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Montrons que f est continue.

On a que sin est continue sur $\mathbb{R}$, x est continue et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et donc

$\frac{\sin(x)}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et donc f

est continue en x_0 $\forall x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Voyons ce qu'il se passe en $x_0 = 0$

$$\lim_{x\to 0} f(x) \underset{x\neq 0}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

$f(0) = 1$ / $x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$
$x \in]-\delta, \delta[$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$x_0 \neq 0, \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{\sin(x)}{x}$$

si x est proche $x_0 \neq 0$, $x \neq 0$

/ $x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$
si $\delta < |x_0|$
$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 = f(0)$$

calcul Ch 4 déf de f

Donc, f est continue en $x_0 = 0$.

Donc f est continue.

(ii) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$]-\infty, 0[\rightarrow]-\infty, 0[$

$[0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$

si $x_0 = 0$, $f(x) = x+1$ continue

$$x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\rightsquigarrow f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$